李 磊，郝重涛. 横向各向同性介质和斜方介质各向异性参数的约束条件. 地球物理学报，2011，**54**(11)：2819～2830，DOI：10.3969/j.issn.0001-5733.2011.11.012

Li L, Hao C T. Constraints on anisotropic parameters in transversely isotropic media and the extensions to orthorhombic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2011, **54**(11): 2819～2830, DOI: 10.3969/j.issn.0001-5733.2011.11.012

横向各向同性介质和斜方介质各向异性参数的约束条件

李 磊，郝重涛

中国地震局地质研究所地震动力学国家重点实验室，北京 100029

摘 要 Thomsen 提出的横向各向同性(TI)介质各向异性参数(α_0、β_0、ε、δ、γ)是各向异性理论研究和实际资料处理中的常用参数，Thomsen 参数的取值必须符合物理学定律和实际地学情况，随意的取值可能导致无意义乃至错误的结果. 本文根据热力学定律和弹性常数的物理意义，结合大量的实测数据，提出常见 TI 介质的 Thomsen 参数需要满足以下约束条件：$1/4<f=1-\beta_0^2/\alpha_0^2<1$；$\varepsilon>-f/2$；$1/2f-1<\delta<2(1/f-1)$；$-1/2<\gamma<(1+2\varepsilon)/4(1-f)-1/2$. Thomsen 参数 ε、δ、γ 的取值区间主要受 P、S 波参考速度比 β_0/α_0 的约束，其值可正可负，实测参数中 ε 和 γ 正多负少；δ、γ、β_0/α_0 的取值范围都有上下界，而 ε 没有上限；γ 与 ε 正相关且取值上限受到 ε 的限制；ε、γ 与 δ 之间不存在明显的约束. 鉴于椭圆各向异性介质和薄互层等效 TI 介质在实际应用中的普遍性，专门给出了这两种介质各向异性参数的附加约束条件. 一些在实际资料中可观测到的 P 波特殊偏振方向和 SV 波三叉现象也能为各向异性参数提供额外的约束. 之后，我们将 TI 介质弹性常数和各向异性参数的约束条件扩展到对正交各向异性介质弹性常数和各向异性参数的约束. 本文提出的各向异性参数约束条件简单实用，为各向异性理论研究和数值模拟中参数的选择提供依据，为实际资料的各向异性参数反演提供约束，既能避免出现无物理意义的研究结果，又能加速反演的搜索过程，提高生产效率，具有理论指导意义和实际应用价值.

关键词 各向异性，横向各向同性，正交各向异性，各向异性参数，负泊松比

DOI：10.3969/j.issn.0001-5733.2011.11.012 **中图分类号** P315 **收稿日期** 2011-02-17，2011-09-30 收修定稿

Constraints on anisotropic parameters in transversely isotropic media and the extensions to orthorhombic media

LI Lei, HAO Chong-Tao

State Key Laboratory of Earthquake Dynamics, Institute of Geology, China Earthquake Administration, Beijing 100029, *China*

Abstract The presence of anisotropy in earth materials has been widely accepted. Due to its high symmetry and relative simplicity in mathematical formulae, transversely isotropic (TI) medium has become one of the most important anisotropic media in seismology. In theoretical and practical studies, anisotropic parameters expressed in terms of elastic constants proposed by Thomsen in 1986 are widely adopted. Values of elastic constants and Thomsen′s anisotropic parameters cannot be chosen freely. There are some constraints among those parameters. Unfortunately, such constraints were ignored by some authors. Sometimes improper parameters

基金项目 国家自然科学基金(40874028、41174045)和中国地震局地质研究所基本科研业务专项(IGCEA1105)资助.

作者简介 李 磊，男，1984 年生，助理研究员. 主要从事地震波各向异性和地震波散射方面的研究. E-mail：lileipku00@gmail.com

were selected and consequently physically meaningless and misleading results were generated. In this study, we proposed a set of simple inequalities for constraining the values of Thomsen′s anisotropic parameters. The inequalities, given by $1/4<f=1-\beta_0^2/\alpha_0^2<1$, $\varepsilon>-f/2$, $1/2f-1<\delta<2(1/f-1)$, and $-1/2<\gamma<(1+2\varepsilon)/4(1-f)-1/2$, were developed based upon the stability condition of material as well as theoretical and experimental investigations on anisotropic parameters. It was shown that ε, δ and γ can be either positive or negative, and their ranges are mainly constrained by P-to-S velocity ratio β_0/α_0; δ, γ and β_0/α_0 are bounded, while ε has no upper limit; γ and ε are positively correlated, and the upper limit of γ is related to ε; the links between ε and δ, and between γ and δ are weak. It was also proved in this paper that the inequalities about five independent elastic constants of TI media derived from the stability condition are sufficient to guarantee that all the phase velocities of three body waves are non-negative. Constraints for some special TI media and physical phenomena were reviewed. For elliptical anisotropy, ε equals to δ and thus $1/2f-1<\varepsilon<2(1/f-1)$. For equivalent TI medium arising from periodic isotropic thin layers, we have $\varepsilon\geqslant\max(0,\delta)$ and $\gamma\geqslant 0$. For some directions called longitudinal directions, at which phase velocity of P waves reaches an extremum, the direction of P polarization is coincident with wavenormal and ray direction. The sufficient and necessary condition for the presence of longitudinal direction is given by $\varepsilon/\delta_{\mathrm{L}}<1/2$, where $\delta_{\mathrm{L}}=(C_{13}+2C_{55}-C_{33})/C_{33}$ is the linear definition of Thomsen′s δ and C_{ij} elastic constants. For the presence of SV triplications, the inequality $\delta-\varepsilon/f>(1-f)/2$ is the condition for basal triplication, and $\delta-\varepsilon>(1-f)/2$ for axial triplication, $(\varepsilon-\delta)/(1+\delta)>2(1-f)/3$ for oblique triplication. The inequality for oblique triplication is simplified from the inequality proposed by Thomsen and Dellinger (2003). We also extend the constraints on elastic constants and anisotropic parameters of TI media to those of orthorhombic media.

Keywords Anisotropy, Transverse isotropy, Orthogonal anisotropy, Anisotropic parameters, Negative Poisson′s ratio

1 引 言

横向各向同性(TI, Transversely Isotropic)介质属于各向异性介质中对称性最高的六方对称系(Hexagonal Symmetry),拥有一个旋转主对称轴和无数个对称面[1,2].完全描述 TI 介质的弹性性质需要 5 个独立的弹性常数,即 C_{11}、C_{13}、C_{33}、C_{55} 和 C_{66}.与低对称系介质相比,TI 介质的独立弹性常数较少,理论公式相对简单,加上 TI 介质在实际地学问题中很常见,许多岩石和矿物本身就具有内在 TI 各向异性[3~7],周期性薄互层和定向排列的晶体、裂隙或孔隙也会诱发长波长等效 TI 各向异性[8~11],考虑 TI 各向异性对改善成像质量、鉴别岩性、推断裂隙或孔隙优势方向和孔隙度等有重要价值,因此,关于 TI 介质的理论、实验和数值研究在过去的二十几年里蓬勃发展,基于 TI 各向异性假设的资料处理解释已经成为一种常规手段[12].

无论是理论和数值研究,还是实际资料反演,都涉及到各向异性参数具体数值的选取.需要注意,各向异性参数的选取并不是任意的,而是必须有物理意义且符合实际介质情况的.基于不恰当的各向异性参数得出的结果是缺乏事实根据的,甚至是错误的.然而,这个问题并没有引起足够的重视,导致在一些文献中出现了不恰当的研究结果.例如,文献[13]在图 1.1 中研究了不同各向异性参数[3]条件下的 P 波波前形状,其中 Thomsen 参数 ε 和 δ 的取值范围为−0.6 到 1.0,而实际上这两个参数必须大于 −0.5[14].低于−0.5 的 ε 意味着弹性常数 C_{11} 小于零,沿 x_1 轴方向的 P 波速度为虚数;低于−0.5 的 δ 意味着弹性常数 C_{13} 为复数,导致某些方向体波速度为复数.这两种情况对完全弹性的各向异性介质来说都是不可能的,具有实际物理意义的弹性常数矩阵,所有分量必须是实数,且所有对角项非负[1,2].另一个例子是文献[15]中图 2 采用的各向异性参数($\alpha_0=4$ km/s, $\beta_0=2.9$ km/s, $\varepsilon=-0.49$,

$\delta=-0.24$,$\rho=3.05$ g/cm^3),如果将这些参数转换成弹性常数,那么各分量分别为 $C_{11}=0.98$ GPa,$C_{13}=-25.7\pm2.5$i GPa,$C_{33}=48.8$ GPa,$C_{55}=25.7$ GPa,其中 C_{13} 为复数.基于这一组错误的各向异性参数,文献[15]的图 2b 中出现了随相角单调下降的 SV 波相速度和群速度曲线.而事实上,除了在椭圆各向异性情况下 SV 波速度与方向无关外[3],其他情况下的 SV 波相速度和群速度曲线都不可能单调.SV 波相速度曲线应该是先下降后上升,或者先上升后下降[16],群速度曲线的变化更加复杂.因此,文献[15]中对 SV 波相速度和群速度单调性的讨论有误.由此可见,了解 TI 介质各向异性参数的正确取值范围是非常有必要的.一组简单实用的各向异性参数约束条件对实验室超声测量和野外地震观测数据的各向异性反演也非常有用,一方面可以避免出现无物理意义的反演结果,另一方面有助于加速反演的搜索过程.

关于 TI 介质弹性常数和各向异性参数的约束条件,许多文献已经有所涉及.例如,Auld[1] 和 Musgrave[2] 根据介质的稳定性条件推导了弹性常数的限制条件;Backus[8]、Berryman[9]、Schoenberg[10]、Berryman 等[11] 讨论了薄互层等效 TI 介质弹性常数的取值范围;Schoenberg 和 de Hoop[17] 在推导 TI 介质慢度分量解析表达式时假设 $\max(C_{55},C_{66})<\min(C_{11},C_{33})$;Vavrycuk[18]、Thomsen 和 Dellinger[19] 在讨论 SV 波波前三叉现象时假设 $C_{55}<C_{11}$,$C_{55}<C_{33}$,$C_{13}+C_{55}>0$;李磊[14] 在讨论 Thomsen 线性近似公式的适用范围时指出,有物理意义的各向异性参数 ε 和 δ 必须大于 -0.5.以上结果只是在讨论其它问题时顺带提及,而不是专门的、全面的研究.对 TI 介质各向异性参数约束条件研究得较为系统的是文献[15]和[20],但是前者根据 P 波和 SV 波的相速度大于零推导出的 29 组复杂的限制条件(见其附录)不仅形式复杂不便使用,而且错误较多;后者是对过去文献中相关结果的简单总结,给出的限制条件较为宽泛.本文的目的是提出一套形式紧凑、范围适当的 TI 介质各向异性参数约束条件,能方便应用于理论研究、数值模拟和实际资料正反演.在下面的小节中,本文首先根据介质稳定性条件对弹性常数的物理约束,以及理论研究和实际观测对弹性常数的经验约束,推导出一组关于各向异性参数的不等式,然后利用实测参数对本文提出的不等式组进行验证,最后,针对一些特殊的 TI 各向异性和特殊现象,给出了相应的各向异性参数约束条件.

2　对弹性常数的物理约束

能量守恒定律是最基本的物理学定律之一,介质的稳定存在和状态变化都必须符合能量守恒定律.取介质的零应变状态为参考,假设介质在外力作用下发生应变,那么无论应变多么微小,能量守恒定律要求其应变势能大于零,这是介质能够稳定存在的充要条件[1,2].对 TI 介质,这一稳定性条件等价于要求弹性常数矩阵

$$\boldsymbol{C}_{IJ}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & & & \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{55} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \tag{1}$$

为正定矩阵(其中 $C_{12}=C_{11}-2C_{66}$).$\boldsymbol{C}_{IJ}$ 为正定矩阵的充要条件是所有顺序主子式都大于零,由此可得[1,2]

$$C_{11}>C_{66}>0;C_{55}>0;C_{33}(C_{11}-C_{66})>C_{13}^2. \tag{2}$$

下面我们将证明,上述不等式足以保证 P 波和 SV 波的相速度在任意方向都大于零.

TI 介质中 P 波和 SV 波的相速度精确表达式为[1~3,12]

$$\rho v^2=\frac{1}{2}\Big(C_{11}s_\theta^2+C_{33}c_\theta^2+C_{55}\pm\sqrt{(C_{11}s_\theta^2-C_{33}c_\theta^2+C_{55}c_{2\theta})^2+(C_{13}+C_{55})^2s_{2\theta}^2}\Big), \tag{3}$$

式中 ρ 为密度,v 为相速度,θ 为相角,s_θ 表示 $\sin\theta$,$c_{2\theta}$ 表示 $\cos2\theta$(依此类推).根号前正号对应 P 波,负号对应 SV 波,可见 SV 波相速度不会高于 P 波相速度.

要证明 P 波和 SV 波的相速度大于零,只需证明它们所有的极值点大于零.在相速度极值点处,式(3)对 θ 的导数为零,由此可得:

当

$$s_\theta^2=\begin{cases} 0 \\ \dfrac{C_{13}+2C_{55}-C_{33}}{2(C_{13}+2C_{55})-C_{11}-C_{33}} \\ 1 \end{cases} \tag{4}$$

时,P 波相速度极值为

$$\rho v_{\mathrm{P}}^2=\begin{cases} C_{33} \\ \dfrac{C_{11}C_{33}-(C_{13}+2C_{55})^2}{C_{11}+C_{33}-2(C_{13}+2C_{55})} \\ C_{11} \end{cases} \tag{5}$$

当

$$s_\theta^2 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{C_{13}+C_{33}}{C_{11}+2C_{13}+C_{33}} \\ 1 \end{cases} \tag{6}$$

时,SV 波相速度极值为

$$\rho v_{\mathrm{SV}}^2 = \begin{cases} C_{55} \\ \dfrac{C_{11}C_{33}-{C_{13}}^2}{C_{11}+2C_{13}+C_{33}}. \\ C_{55}. \end{cases} \tag{7}$$

由于 SV 波相速度不会高于 P 波相速度,因此只需要证明 SV 波的相速度极值大于零. 由不等式(2)可知

$$\begin{aligned} &C_{55} > 0, \\ &C_{11}C_{33} > C_{13}^2, \\ &C_{11}+2C_{13}+C_{33} > {C_{33}}^{-1}(C_{13}+C_{33})^2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

上式中第三个不等式的推导利用了第二个不等式. 由式(8)可知式(7)中 SV 波相速度平方的所有极值(包括极小值)都大于零,因此任何方向的 SV 波相速度都必定大于零. 由此可见,不等式(2)足以保证 P 波和 SV 波的相速度大于零. 文献[15]根据 SV 波相速度大于零来推导各向异性参数的约束条件,最终给出了 29 组复杂的不等式作为各向异性参数的约束条件,不仅形式过于复杂,不利于使用,而且有些条件式与不等式(2)相悖,这样的介质违背物质稳定性条件,无法稳定存在.

3 对弹性常数的经验约束

理论上,只要 TI 介质的弹性常数满足不等式(2),那么该介质的存在就是可能的. 但是,实际介质(尤其是地学介质)弹性常数的取值范围远小于式(2)给定的范围. 根据弹性常数各分量的物理意义,本文提出以下经验性约束条件:

$$\begin{aligned} &0 < 2C_{66} < C_{11}, \\ &0 < C_{13} < \min(C_{11}, C_{33}), \\ &0 < C_{55} < \frac{3}{4}\min(C_{11}, C_{33}). \end{aligned} \tag{9}$$

在下面的段落中我们将逐个讨论式(9)中各不等式的依据和意义.

注意 $C_{12} = C_{11} - 2C_{66}$,因此第一个不等式中 $2C_{66} < C_{11}$ 等价于 $C_{12} > 0$. 这里解释 C_{12} 和 C_{13} 大于零的依据和意义:假设 TI 介质在外力作用下沿主对称轴(x_3 轴)发生单轴应变,即除沿 x_3 轴的正应变 e_3 外,其余应变分量都为 0,由胡克定律可知,沿 x_1 轴的正应力 $\sigma_1 = C_{13}e_3$,由此可见,C_{13} 表示的物理意义是介质在沿 x_1 轴的正应力作用下抵抗沿 x_3 轴方向发生正应变的能力(或者在沿 x_3 轴的正应力作用下抵抗沿 x_1 轴方向发生正应变的能力;C_{12} 的物理意义与此类似). 如果 C_{13} 小于 0,那就意味着在沿 x_1 轴的拉伸(压缩)作用下,介质在 x_3 轴方向将发生膨胀(收缩),此时的泊松比为负数. 负泊松比理论上是可以存在的,各向同性介质泊松比的理论值就在 -1~0.5 之间[21],而且具有负泊松比的人造材料也已成功合成[22],在各向异性介质的非对称轴方向出现负泊松比的现象也很普遍[23]. 但是,对自然形成的介质(尤其是岩石),在对称轴方向出现负泊松比的情况很难出现. 我们查找了大量有关金属、单晶矿物、岩石和聚合物弹性常数的文献和数据手册[1~5,7,24~26],在六方对称系中几乎没有 C_{12} 或 C_{13} 为负数的介质,少数几个例外情况也极有可能是测量或反演误差引起的,例如 Gold[27] 在室温下测量金属铍的弹性常数为 C_{11}=308 GPa,C_{12}=−58 GPa,C_{13}=8.7 GPa,C_{33}=357 GPa,C_{55}=110 GP,其中 C_{12} 为负数,但数值上远小于 C_{11} 和 C_{33}. 后来的研究[28~30]表明,室温下铍的 C_{12} 应该在 14.8~26.8 GPa 之间,文献[27]中出现负的 C_{12} 是因为计算弹性常数所用的近似公式是基于弱各向异性假设,不适用于铍这类强各向异性介质. 因此,我们认为假设 TI 介质的 C_{12} 和 C_{13} 大于零是安全的、合理的.

由式(8)中 $C_{11}C_{33} > C_{13}^2$ 可知 $C_{11}+C_{33} = \sqrt{(C_{11}-C_{33})^2+4C_{11}C_{33}} > 2C_{13}$,式(9)将这两个不等式强化为 C_{13} 小于 C_{11} 和 C_{33}. 在关于 TI 介质弹性常数的论文和数据手册中没有出现 C_{13} 大于 C_{11} 或 C_{33} 的测量结果. 地学 TI 介质 C_{12} 或 C_{13} 接近式(9)中上、下限的情况并不少见,页岩[5]常常出现 C_{12} 或 C_{13} 很低的情况(远小于 C_{11} 和 C_{33}),未固结的沉积层[20]常常表现出很高的 C_{13}(接近 C_{11} 或 C_{33})和很低的 C_{55}(远低于 C_{11} 和 C_{33}). C_{13} 与 C_{55} 和 C_{66} 之间不存在必然的大小关系.

式(9)中的最后一个不等式主要是为了限制对称轴方向的 S 波速度,使其大于零且低于 P 波速度,式中的系数 3/4 使得 S 波速度不至于过于接近 P 波速度,该系数等价于假设沿对称轴方向的 P/SV 波速度比大于 1.15(实测的 P/SV 波速度比通常在 1.4 以上). 我们检查了一些文献和数据手册[1~5,7,24~26]中 TI 介质各弹性常数的相对大小,发现 C_{11} 与 C_{33} 之间、C_{55} 与 C_{66} 之间不存在必然的大小关系,但都满足该不等式. 对各向同性介质,不等式(9)恒成立.

4　对各向异性参数的约束

用弹性常数表示的解析公式通常形式复杂,不利于简化,且物理意义不够直观,因此,在实际应用中通常采用 1986 年 Thomsen 定义的 TI 介质各向异性参数[3]. Thomsen 参数是弹性常数的简单代数组合,但将各向异性的效应从各向同性背景中剥离出来,便于简化公式,且能更直观地体现各向异性的特征. Thomsen 参数的提出很大程度上推动了各向异性在理论研究和实际应用方面的发展. Thomsen 参数的定义为[3]

$$\begin{cases}\alpha_0=\sqrt{\dfrac{C_{33}}{\rho}},\\ \beta_0=\sqrt{\dfrac{C_{55}}{\rho}},\\ \varepsilon=\dfrac{C_{11}-C_{33}}{2C_{33}},\\ \delta=\dfrac{(C_{13}+C_{55})^2-(C_{33}-C_{55})^2}{2C_{33}(C_{33}-C_{55})},\\ \gamma=\dfrac{C_{66}-C_{55}}{2C_{55}}.\end{cases}\tag{10}$$

ε 约等于平行和垂直于对称轴方向的 P 波速度的相对差别,其大小反映 P 波各向异性的强弱;δ 控制 P 波在小角度的各向异性,与 NMO 速度直接相关,与岩性关系密切,是最重要的 Thomsen 参数;γ 约等于平行和垂直于对称轴方向的 SH 波速度的相对差别,其大小反映 SH 波各向异性的强弱[3,12]. 参数 δ 还有一种线性的定义方式 $\delta_L=(C_{13}+2C_{55}-C_{33})/C_{33}$,两者之间的关系为

$$\delta=\frac{(\delta_L+f)^2}{2f}-\frac{f}{2}=\delta_L+\frac{\delta_L^2}{2f},\tag{11}$$

式中:

$$f=1-\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2}.\tag{12}$$

由式(11)可以看出,$\delta\geqslant\delta_L$,但两者必定同号,且差别为二阶小量,通常可以忽略.

利用公式(10)~(12),将关于 TI 介质弹性常数的限制条件转化为关于各向异性参数的限制条件,得:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}<f<1,\\ &\varepsilon>-\frac{f}{2},\\ &-\frac{1}{2}<\gamma<\frac{1+2\varepsilon}{4(1-f)}-\frac{1}{2},\\ &1-2f<\delta_L<2(1-f),\\ &\frac{1}{2f}-1<\delta<2\left(\frac{1}{f}-1\right).\end{aligned}\tag{13}$$

具体过程参见本文附录. 从上式可以看出:ε、δ、γ 的取值区间主要受到 P 波和 S 波的参考速度比 α_0/β_0 的约束,其中 γ 的取值上限还受 ε 的限制;波速比 α_0/β_0 以及各向异性参数 δ 和 γ 的取值都有上、下限,而 ε 的取值没有上限. 我们对 281 组实测各向异性参数[3,5]进行了检验,都满足上述约束条件(见图 1). 从图 1a 可以看出,实测 f 值都在 0.4 以上,明显高于不等式(13)给出的下限 1/4,再次说明式(9)中系数 3/4 是安全的;实测 $f+2\varepsilon$ 值都在 0.5 以上,明显高于不等式(13)给出的下限 0,说明岩石和矿物的各向异性参数 ε 较少出现大的负值. 我们找到的 $f+2\varepsilon$ 值最低的是霞石[4],其 $f=0.7$,$\varepsilon=-0.18$,$f+2\varepsilon=0.33$. 目前岩石物理超声测量已经发现了许多正 ε 极大的情况,例如页岩[3,5~7]的 ε 可达 0.5 以上,风化石膏和云母晶体矿物[3]的 ε 在 1.12~1.22之间,干燥 Angers 板岩的 ε 更是超过 1.5. 我们找到的最极端的例子是石墨[4],其 ε 高达 14.02. 从图 1b 可以看出,γ 的特点与 ε 比较类似,实测 γ 值都在 -0.1 以上,明显高于不等式(13)给出的下限 $-1/2$,说明 γ 较少出现大的负值. 与 ε 不同的是,γ 的取值存在理论上限,并存在与不等式(13)给出的上限非常接近的情况(即图 1b 中横坐标接近 0 的情况). 从图 1(c~d)可以看出,实测 δ 和 δ_L 的值都在限定范围内(图中虚线),而且存在非常接近上下限的情况,说明不等式(13)给出的范围不仅合理,而且恰到好处.

需要注意,不等式(13)与不等式(2)和(9)并不完全等价,而是以简洁性为主要原则来选择上、下限的结果. 实际上,ε 和 γ 与 δ 和 δ_L 之间也存在一定的约束关系. 例如,严格的 δ_L 上限可表示为 $2[1-f+\min(0,\varepsilon)]$,但因为负 ε 较少且远小于 $1-f$,所以这种约束力不强. 从图 2(a,b)中也可以看出 ε 与 $\delta(\delta_L)$ 之间没有明显的相关性,同样,从图 2d 中可以看出 γ 与 δ 之间没有明显的相关性. 但是,从图 2c 可以看出,ε 与 γ 之间存在明显的正相关.

从图 1,2 还能看出,ε、δ 和 γ 都可正可负,但 ε 和 γ 正值较多,负值较少,而 δ 正负值出现的频率相当. 负 δ 对应较小的 C_{13}($C_{13}<C_{33}-2C_{55}$),正的 δ 对应较大的 C_{13}($C_{13}>C_{33}-2C_{55}$). 对大多数情况,ε 在 -0.05~0.45 之间,δ 在 -0.2~0.3 之间,γ 在 -0.05~0.2之间. 但是需要注意,不同岩石和矿物

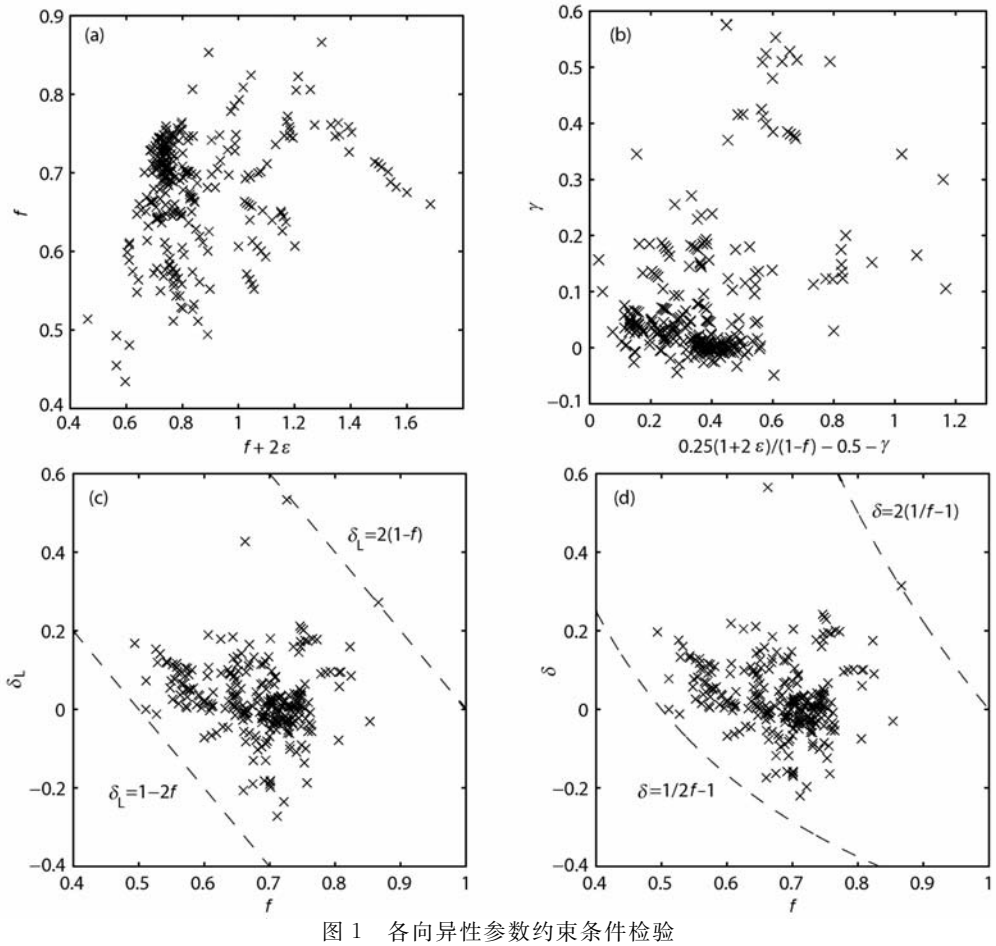

图 1 各向异性参数约束条件检验

(a)ε 和 f 分布;(b)γ 分布;(c)δ_L 分布;(d)δ 分布.

Fig. 1 Maps of laboratorial estimated anisotropic parameters for verification of inequalities (13) proposed in this paper

(a) For ε and f; (b) For γ; (c) For δ_L; (d) For δ.

的各向异性参数差异较大,同种岩石和矿物在不同温压状态下各向异性参数也会发生变化,以上数值范围只是针对有限的几种岩石的统计结果,不一定具有普适性.其他作者也提出过一些各向异性参数的数字参考范围.例如,Backus[8]认为,常见的 P/S 波速比范围在 1.52～2.22 之间;Berge[20]认为固结的沉积岩波速比范围在 1.5～2 之间,未固结的沉积岩波速比更大;Tsvankin[12]提出,在实际勘探中感兴趣的波速比范围在 1.5～2.5 之间,ε 在－0.05～0.45 之间,δ 在－0.2～0.3 之间;Fowler[31]推荐的波速比范围在 $\sqrt{2}$ ～4 之间,ε 在 0～0.2 之间,δ 在 0.05～0.1 之间.需要强调,不论是岩石物理超声实验还是野外地震勘探,都已经发现许多在这些数值范围之外的测量结果,因此,在使用这些数值范围时,一定要事先确定这些范围是否适用于研究对象.

5 特殊情况

椭圆各向异性介质是一种特殊的 TI 介质,在各向异性研究的发展史中起过重要作用[32,33];周期性薄互层引起的长波长等效各向异性是实际生产中很常见、很重要的一种 TI 各向异性.因此,在本节中我们专门讨论了这两种特殊各向异性的 Thomsen 参数取值范围.此外,TI 介质中有一些特别的、可观测到的物理现象,出现这些现象需要各向异性参数满足特殊的约束条件,我们对这些约束条件也作了总结.

5.1 椭圆各向异性

椭圆各向异性介质是 TI 介质中极其特殊的一种,椭圆各向异性介质中P波的波前为旋转椭球

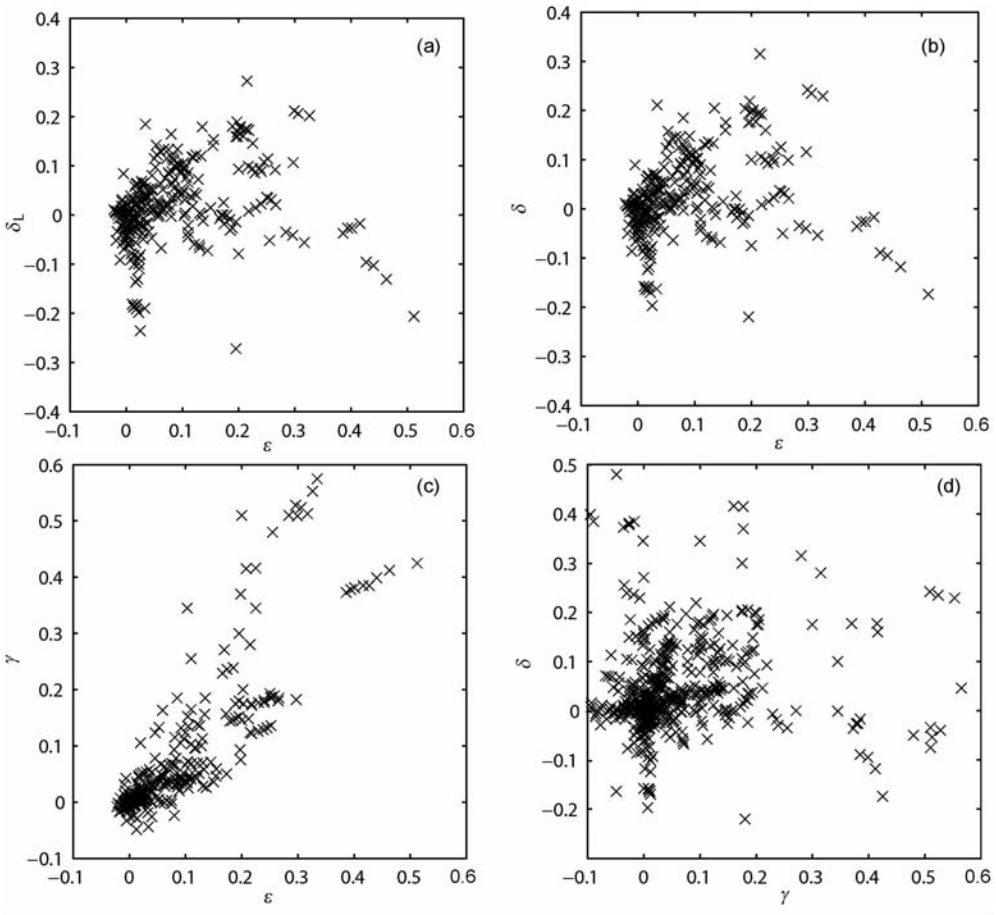

图 2　实测各向异性参数分布图

(a)ε-δ_L 分布;(b)ε-δ 分布;(c)ε-γ 分布;(d)γ-δ 分布.

Fig. 2　Maps of laboratorial estimated anisotropic parameters for investigation of correlations between parameters

面,SV 波的波前为球面(即 SV 波为各向同性). 椭圆各向异性的解析公式远比一般 TI 的解析公式要简单. 在 20 世纪 90 年代之前,椭圆各向异性假设曾经被大量采用. 如今,椭圆各向异性在实际资料反演中仍可以作为初步建立各向异性介质模型的工具. 此外,在天然地震学中,常常只用一个参考速度和一个各向异性强度百分比来描述介质的各向异性,这种假设实际上等价于椭圆各向异性假设. 出现椭圆各向异性的充要条件[3,32,33]是 $\varepsilon=\delta$,利用该等式将式(9)中关于 ε 和 δ 的不等式合并,得

$$\frac{1}{2f}-1<\varepsilon<2\left(\frac{1}{f}-1\right). \tag{14}$$

5.2　周期性薄互层等效各向异性

周期性薄互层是一种常见的地学介质,在长波长条件下会表现出与均匀 TI 介质相同的性质,被称为等效 TI 各向异性[8~11]. 对各向同性薄互层诱发的 TI 各向异性,理论研究[8~11]已经证明,$0<\frac{C_{55}}{C_{33}}<\frac{3}{4}$,$C_{55}\leqslant C_{66}$,$(C_{13}+C_{55})^2\leqslant(C_{11}-C_{55})(C_{33}-C_{55})$,而且除非所有薄层的 P 波速度都相同,否则 $C_{33}\leqslant C_{11}$ 也成立[11],由此可得以下附加约束条件:

$$\varepsilon\geqslant\max(0,\delta);\gamma\geqslant 0. \tag{15}$$

5.3　中间角度的径向方向

各向异性介质中的径向方向[34](longitudinal directions)就是 P 波相速度为极值的方向,在这些方向 P 波相速度对相角的导数为零,相速度与群速度相等,P 波的相传播方向、群传播方向与偏振方向重合,并都与 S 波的偏振方向垂直,这些现象非常类似于各向同性介质中波的传播特征,不同之处在于 SV 波和 SH 波依然分裂. 基于以上特征,径向方向在实验室和野外观测中都有可能被观测到,并可以用来确定介质的对称系[34]. 式(4)给出了 TI 介质中径向方向的解析公式,其中相角为 0°和 90°的方向必然是径向方向,而中间角度的径向方向是否出现取决于各向异性参数之间的关系. 如果中间角度出现径向方向,那么式(4)中 s_θ^2 必须介于 0 和 1 之间. 利用式(4)和(10),可知中间角度出现径向方向的充要条件为

$$\frac{\varepsilon}{\delta_L} < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

更详细的中间角度出现径向方向的各类情况如图 3 所示. 如果观测到径向方向,可以依据图 3 给出的约束条件来判断各向异性参数之间的相互关系,甚至可以利用式(4)和(5)直接反演弹性常数和各向异性参数.

5.4 SV 波前三叉现象

TI 介质中 SH 波的波前为椭球面,P 波的波前为类椭球面,而 SV 波的波前较为复杂,除了常规的类椭球面以外,还有可能出现自我交叉[1,2,18,19,35,36]. SV 波波前出现三叉现象的充要条件是 SV 波的慢度面出现凹陷[2,17~19,35],在波前出现三叉现象的方向,SV 波走时出现多值性,能量发生会聚,这些现象可以在实际资料中观测到[37],并且会使横波和转换波的数据处理变得更加困难[36],但在另一方面,波前三叉现象也能为各向异性参数反演提供约束信息. 研究表明[35],在 x_1 轴方向出现三叉现象(基向三叉;basal triplication)的条件为 $(C_{13}+C_{55})^2-C_{33}(C_{11}-C_{55})>0$;在 x_3 轴方向出现三叉现象(轴向三叉;axial triplication)的条件为 $(C_{13}+C_{55})^2-C_{11}(C_{33}-C_{55})>0$;如果同时满足前两个条件,那么在 x_1 轴和 x_3 轴都会出现三叉现象(双重三叉;double triplications);在倾斜方向出现三叉现象(倾向三叉;oblique triplication)的条件为 $(C_{13}+C_{55})^2-3C_{55}{}^2+C_{55}(C_{11}+C_{33})-3C_{11}C_{33}+2\sqrt{(C_{11}-C_{55})(C_{33}-C_{55})}\times\frac{C_{11}C_{33}-C_{55}{}^2}{C_{13}+C_{55}}>0$. 图 4 给出了这四种 SV 波波前三叉现象的示意图. 利用式(10)可将上述条件改写成用各向异性参数表示的形式:

$$\delta-\frac{\varepsilon}{f}>\frac{1-f}{2},\ \text{基向三叉;} \tag{17}$$

$$\delta-\varepsilon>\frac{1-f}{2},\ \text{轴向三叉;} \tag{18}$$

$$\frac{\varepsilon-\delta}{1+\delta}>\frac{2(1-f)}{3},\ \text{倾向三叉.} \tag{19}$$

其中式(19)是简化后的近似公式. 从式(17)~(19)可以看出:当式(17)和(18)同时成立时,沿 x_1 轴和 x_3 轴方向的波前三叉可以同时出现(即双重三叉),但倾斜方向的波前三叉只能单独出现;椭圆各向异性介质 $\varepsilon=\delta$,不会出现波前三叉现象;当介质偏离椭圆各向异性时(即 ε 与 δ 的差别增大),波前三叉现象开始出现;基向和轴向三叉在 ε 变小、δ 变大(C_{13} 变大)时变得明显,倾向三叉在 ε 变大、δ 变小(C_{13} 变小)时变得明显;结合式(15)可知各向同性薄互层等效 TI 介质中可能出现倾向三叉,但不会出现基向和轴向三叉,实际上对其他地学 TI 介质也比较容易符合倾向三叉出现的条件,而难以满足出现基向和轴向三叉的条件,尤其是难以只满足其中之一,正因为如此,在野外观测中三叉现象通常只在长炮检距时出现[19]. 此外,Vavrycuk[18] 指出,波前三叉现象不会在各向异性强度低于 8.86%~9.72%的弱 TI 介质中出现,但也不能保证在强 TI 介质中一定出现.

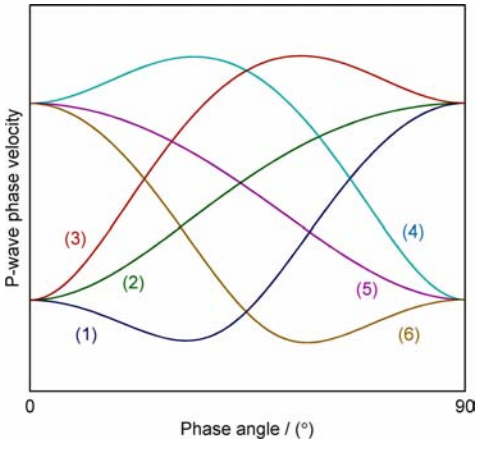

图 3 不同形态的 TI 介质 P 波相速度曲线

出现此类曲线的条件按编号依次为:(1)$\varepsilon>0,\delta_L<0$;(2)$\varepsilon>0,0\leqslant\delta_L\leqslant2\varepsilon$;(3)$\varepsilon\geqslant0,\delta_L>2\varepsilon$;(4)$\varepsilon<0,\delta_L>0$;(5)$\varepsilon<0,2\varepsilon\leqslant\delta_L\leqslant0$;(6)$\varepsilon\leqslant0,\delta_L<2\varepsilon$.

Fig. 3 Patterns of P-wave phase velocity curve in a TI medium

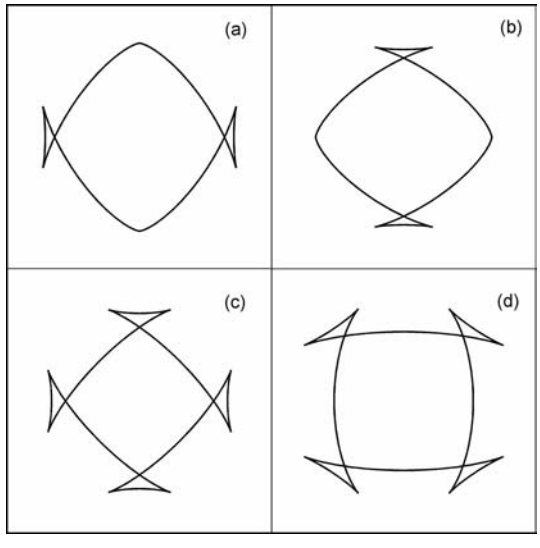

图 4 四种 SV 波波前三叉现象

(a)基向三叉;(b)轴向三叉;(c)双重三叉;(d)倾向三叉.

Fig. 4 Illustrations of SV wavefront triplications

(a) Basal triplication; (b) Axial triplication; (c) Double triplications; (d) Oblique triplication.

6　向斜方介质的扩展

斜方(也称正交各向异性)介质属于正交对称系,有 9 个独立的弹性常数,其弹性常数矩阵的形式为

$$\boldsymbol{C}_{IJ}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

斜方介质弹性常数矩阵的非零项与 TI 介质相同,但各分量之间不存在等式关系.在地学问题中,常见的斜方介质是在 VTI 背景中嵌入定向排列的直立裂隙形成的等效斜方介质[38],文献[7]中的气煤就是一种典型的例子.尽管文献[7]中作者将气煤近似作为 TI 介质来看待,但从文中的描述来看,由于节理的存在煤岩本身就具有强 TI 介质的性质,再加上气煤中垂直于煤层面的裂隙非常发育,因此将气煤视为斜方介质更为恰当.从文献[7]表 2 中给出的不同方向体波速度的差异也能看出气煤具有正交各向异性.除了由结构引起的等效正交各向异性外,很多矿物本身也具有内在正交各向异性[1,2,4,25,26].目前关于斜方介质中地震波传播的理论和数值研究[12,38~42]已经有了一定的发展,但实验室岩样超声测量[43]的结果还比较少,斜方介质在实际生产中的应用也很罕见.到目前为止,我们还没有发现关于斜方介质各向异性参数取值范围的研究结果发表.在本节中,我们试图将上文中对 TI 介质弹性常数和各向异性参数的讨论推广到斜方介质.

6.1　物理约束

与上文中关于 TI 介质的讨论类似,物质稳定性条件同样要求斜方介质的弹性常数矩阵为正定矩阵,式(14)的所有顺序主子式都必须大于零,由此可得:

$$\begin{cases} C_{KK}>0\ (K=1,2,\cdots,6), \\ C_{II}C_{JJ}>C_{IJ}^2(I,\ J=1,2,3;\ I\neq J), \\ C_{11}C_{22}C_{33}-C_{11}C_{23}^2-C_{22}C_{13}^2 \\ \quad -C_{33}C_{12}^2+2C_{12}C_{13}C_{23}>0. \end{cases} \tag{21}$$

(21)式不对重复下标求和.

6.2　经验约束

考虑到物质稳定性条件和弹性常数的物理意义,一般来说,上文中关于 TI 介质弹性常数的讨论对低对称系的斜方介质也成立.我们将式(9)推广到斜方介质,提出以下经验性约束条件:

$$\begin{cases} 0<C_{44}<\dfrac{3}{4}\min(C_{22},C_{33}), \\ 0<C_{55}<\dfrac{3}{4}\min(C_{11},C_{33}), \\ 0<C_{66}<\dfrac{3}{4}\min(C_{11},C_{22}), \\ 0<C_{12}<\min(C_{11},C_{22}), \\ 0<C_{13}<\min(C_{11},C_{33}), \\ 0<C_{23}<\min(C_{22},C_{33}). \end{cases} \tag{22}$$

根据 Voigt 规则(下角标 11→1,22→2,33→3,23→4,13→5,12→6),上式可以简写成

$$\begin{cases} 0<C_{iijj}<\min(C_{iiii},C_{jjjj}), \\ 0<C_{ijij}<\dfrac{3}{4}\min(C_{iiii},C_{jjjj}) \\ \quad (i,j=1,2,3;\ i\neq j). \end{cases} \tag{23}$$

在将式(9)推广到斜方介质的过程中,需要注意保持弹性常数下标的轮换对称性,如果不考虑这种对称性,可能会错误地得到如下结果

$$\begin{cases} 0<\min(C_{12},C_{13},C_{23})\leqslant\max(C_{12},C_{13},C_{23}) \\ \quad <\min(C_{11},C_{22},C_{33}), \\ 0<\min(C_{44},C_{55},C_{66})\leqslant\max(C_{44},C_{55},C_{66}) \\ \quad <\dfrac{3}{4}\min(C_{11},C_{22},C_{33}). \end{cases} \tag{24}$$

这里保持弹性常数下标的轮换对称性实质上相当于在每个独立的对称面内考察弹性常数之间的关系.众所周知,斜方介质对称面内的弹性波性质与 TI 介质非常类似[2],而对实际介质而言,不同对称面内的弹性常数不一定存在制约关系,因此式(24)并不一定成立.在实际介质中也确实有一些不符合式(24)的例子,例如橡木[2]的弹性常数为:$C_{11}=0.305$ GPa,$C_{12}=0.103$ GPa,$C_{13}=0.150$ GPa,$C_{22}=0.138$ GPa,$C_{23}=0.103$ GPa,$C_{33}=0.682$ GPa,$C_{44}=0.78$ GPa,$C_{55}=0.132$ GPa,$C_{66}=0.40$ GPa,其中 C_{13} 小于同一对称面内的 C_{11} 和 C_{33},但是大于与之垂直对称面内的 C_{22},因此不满足式(24).

我们检查了现有的文献和工具书中[1,2,4,25,26]斜方介质的弹性常数,绝大多数都符合式(22)、(23),只有极个别单晶矿物例外,例如甲酸锶[24]晶体的弹性常数为:$C_{11}=43.9$ GPa,$C_{12}=10.4$ GPa,$C_{13}=-14.9$ GPa,$C_{22}=34.8$ GPa,$C_{23}=-1.4$ GPa,

$C_{33}=37.4$ GPa,$C_{44}=15.4$ GPa,$C_{55}=10.7$ GPa,$C_{66}=17.2$ GPa,其中 C_{13} 和 C_{23} 为负数;四方晶系(可视为正交对称系的特殊情况)中的磷酸二氢铵晶体[25]的弹性常数为:$C_{11}=67.47$ GPa,$C_{12}=-10.66$ GPa,$C_{13}=16.52$ GPa,$C_{33}=30.22$ GPa,$C_{55}=6.85$ GPa,$C_{66}=6.39$ GPa,其中 C_{12} 为负数;四方晶系中的二氧化碲晶体[1]的弹性常数为:$C_{11}=55.7$ GPa,$C_{12}=51.2$ GPa,$C_{13}=21.8$ GPa,$C_{33}=105.8$ GPa,$C_{55}=26.5$ GPa,$C_{66}=65.9$ GPa,其中 C_{66} 大于 C_{11}.但是,这些例外的弹性常数数据来自于物理学的文献而不是地学文献,测量弹性常数的温度、压力环境有差异,而且也不能排除这些例外情况是由于测量误差或反演过程中使用近似公式引起的可能性.再者,地学介质多为复合物而非单晶,地学问题中观测到的各向异性通常是由晶格优势方向、形状优势方向等结构因素引起的地震波长波长等效各向异性,而非晶体本身的各向异性.在复合物中没有发现不符合式(22)、(23)的情况.

6.3 对各向异性参数的约束

Tsvankin[38]在 1997 年将 Thomsen 定义的 TI 介质各向异性参数推广到斜方介质,提出以下各向异性参数:

$$\begin{cases}\alpha_0=\sqrt{\dfrac{C_{33}}{\rho}},\\ \beta_0=\sqrt{\dfrac{C_{55}}{\rho}},\\ \varepsilon_1=\dfrac{C_{22}-C_{33}}{2C_{33}},\\ \varepsilon_2=\dfrac{C_{11}-C_{33}}{2C_{33}},\\ \delta_1=\dfrac{(C_{23}+C_{44})^2-(C_{33}-C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33}-C_{44})},\\ \delta_2=\dfrac{(C_{13}+C_{55})^2-(C_{33}-C_{55})^2}{2C_{33}(C_{33}-C_{55})},\\ \delta_3=\dfrac{(C_{12}+C_{66})^2-(C_{11}-C_{66})^2}{2C_{11}(C_{11}-C_{66})},\\ \gamma_1=\dfrac{C_{66}-C_{55}}{2C_{55}},\gamma_2=\dfrac{C_{66}-C_{44}}{2C_{44}}.\end{cases}\tag{25}$$

其中参数 δ 也有线性的定义方式:

$$\begin{cases}\delta_{1L}=\dfrac{C_{23}+2C_{44}-C_{33}}{C_{33}},\\ \delta_{2L}=\dfrac{C_{13}+2C_{55}-C_{33}}{C_{33}},\\ \delta_{3L}=\dfrac{C_{12}+2C_{66}-C_{11}}{C_{11}}.\end{cases}\tag{26}$$

两者之间存在的关系为:

$$\begin{cases}\delta_1=\dfrac{(\delta_{1L}+f_1)^2}{2f_1}-\dfrac{f_1}{2},\\ \delta_2=\dfrac{(\delta_{2L}+f_2)^2}{2f_2}-\dfrac{f_2}{2},\\ \delta_3=\dfrac{(\delta_{3L}+f_3)^2}{2f_3}-\dfrac{f_3}{2}.\end{cases}\tag{27}$$

其中

$$\begin{cases}f_1=1-\dfrac{C_{44}}{C_{33}},\\ f_2=1-\dfrac{C_{55}}{C_{33}},\\ f_3=1-\dfrac{C_{66}}{C_{11}}.\end{cases}\tag{28}$$

将弹性常数约束条件转换成各向异性参数的约束条件,得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}<f_1,f_2,f_3<1,\\ \varepsilon_1>-\dfrac{f_1}{2},\ \varepsilon_2>-\dfrac{f_2}{2},\\ 1-2f_1<\delta_{1L}<2(1-f_1),\\ \dfrac{1}{2f_1}-1<\delta_1<2\left(\dfrac{1}{f_1}-1\right),\\ 1-2f_2<\delta_{2L}<2(1-f_2),\\ \dfrac{1}{2f_2}-1<\delta_2<2\left(\dfrac{1}{f_2}-1\right),\\ 1-2f_3<\delta_{3L}<2(1-f_3),\\ \dfrac{1}{2f_3}-1<\delta_3<2\left(\dfrac{1}{f_3}-1\right),\\ -\dfrac{1}{2}<\gamma_1<\dfrac{f_2+2\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{2(1-f_2)},\\ -\dfrac{1}{2}<\gamma_2<\dfrac{f_1+2\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{2(1-f_1)}.\end{cases}\tag{29}$$

由式(29)可见,在对称面内斜方介质弹性常数之间的制约关系与 TI 介质类似,但是不同对称面内的关系有差别(参数下标不同).目前关于斜方介质的实测数据较少,不足以如同上文中 TI 介质一样利用大量实测参数来检验上述不等式和研究各参数之间的相关性.除此以外,还有一个问题就是目前的文献中关于斜方介质各向异性参数的定义并不统一,其中 ε_1、ε_2、δ_1、δ_2 这四个参数的定义比较一致,但是 δ_3、γ_1、γ_2 这几个参数的定义有差异,例如文献[44,45]中的定义为

$$\begin{cases}\delta_{3L}=\dfrac{C_{12}+2C_{66}-C_{33}}{C_{33}},\\ \gamma_1=\dfrac{C_{44}-C_{55}}{2C_{55}},\\ \gamma_2=\dfrac{C_{66}-C_{44}}{2C_{44}}.\end{cases}$$

7　结　论

本文根据介质稳定性条件、弹性常数物理意义和各向异性波动理论,结合实测各向异性参数,提出了一组简洁的 TI 介质各向异性参数约束条件. 举例分析了现有研究中存在的一些由于忽视各向异性参数约束条件而导致的不合理研究结果,强调了在研究和实践中重视各向异性约束条件的必要性. 此外,还专门给出了椭圆各向异性介质和薄互层等效 TI 介质的附加约束条件,以及出现某些特殊偏振方向或三叉现象所对应的参数条件. 此外,本文还给出了斜方介质的物质稳定性条件,并将 TI 介质弹性常数和各向异性参数的约束条件推广到斜方介质. 本文提出的约束条件的最大特点是简单易用,且范围恰当,可为理论研究和数值模拟中各向异性参数的取值提供依据,为实验室测量和野外观测数据的各向异性参数反演提供约束.

附　录

本附录给出由弹性常数的约束关系式(9)推导各向异性参数的约束关系式(13)的过程. 如文中所述,式(13)与式(9)并不完全等价,而是考虑了简洁性的结果,因此式(13)的范围实际上略大于式(9).

由各向异性参数的定义式(10)可得如下等式:

$$\begin{cases} C_{11} = C_{33}(1+2\varepsilon), \\ C_{13} = C_{33}(2f-1+\delta_{\mathrm{L}}), \\ C_{55} = C_{33}(1-f), \\ C_{66} = C_{55}(1+2\gamma). \end{cases}$$

下面的推导主要是利用了这几个等式,将这些等式代入关于弹性常数的不等式后化简,即得关于各向异性参数的不等式.

由 $0 < C_{55} < \frac{3}{4}C_{33}$,得 $\frac{1}{4} < f < 1$.

由 $C_{11} > C_{55}$,得 $\varepsilon > -\frac{f}{2}$.

由 $C_{13} > 0$,得 $\delta_{\mathrm{L}} > 1-2f$;由 $C_{13} < C_{11}$,得 $\delta_{\mathrm{L}} < 2(1-f+\varepsilon)$;由 $C_{13} < C_{33}$,得 $\delta_{\mathrm{L}} < 2(1-f)$. 如文中所述,$\varepsilon$ 和 δ_{L} 之间无明显相关性,因此我们取 $1-2f < \delta_{\mathrm{L}} < 2(1-f)$. 再由式(11)给出的 δ 与 δ_{L} 之间的关系,得 $\frac{1}{2f}-1 < \delta < 2\left(\frac{1}{f}-1\right)$.

由 $C_{66} > 0$,得 $\gamma > -\frac{1}{2}$;由 $C_{11} > 2C_{66}$,得 $\gamma < \frac{1+2\varepsilon}{4(1-f)} - \frac{1}{2}$. 因此 γ 的取值范围为 $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1+2\varepsilon}{4(1-f)} - \frac{1}{2}$.

将斜方介质弹性常数约束转换成各向异性参数约束的过程与此类似,主要是利用以下等式进行替换,具体过程这里不再赘述.

$$\begin{cases} C_{11} = C_{33}(1+2\varepsilon_2), \\ C_{22} = C_{33}(1+2\varepsilon_1), \\ C_{12} = C_{11}(2f_3-1+\delta_{3\mathrm{L}}), \\ C_{13} = C_{33}(2f_2-1+\delta_{2\mathrm{L}}), \\ C_{23} = C_{33}(2f_1-1+\delta_{1\mathrm{L}}), \\ C_{44} = C_{33}(1-f_1), \\ C_{55} = C_{33}(1-f_2), \\ C_{66} = C_{55}(1+2\gamma_1) = C_{44}(1+2\gamma_2). \end{cases}$$

参考文献(References)

[1] Auld B A. Acoustic Fields and Waves in Solids, 2nd ed. Malabar: Krieger, 1990

[2] Musgrave M J P. Crystal Acoustics. San Francisco: Holden-Day, 1970

[3] Thomsen L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 1986, **51**(10): 1954～1966

[4] Ahrens T J. Mineral Physics & Crystallography. In: A Handbook of Physical Constants. Washington: American Geophysical Union Washington, 1995

[5] Wang Z J. Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data. *Geophysics*, 2002, **67**(5): 1423～1440

[6] 邓继新, 史　鳟, 刘瑞慕等. 泥岩、页岩声速各向异性及其影响因素分析. 地球物理学报, 2004, **47**(5): 862～686
Deng J X, Shi G, Liu R X, et al. Analysis of the velocity anisotropy and its affection factors in shale and mudstone. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, **47**(5): 862～868.

[7] 董守华. 气煤弹性各向异性系数实验测试. 地球物理学报, 2008, **51**(3): 947～952
Dong S H. Test on elastic anisotropic coefficients of gas coal. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, **51**(3): 947～952

[8] Backus G E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophy. Res.*, 1962, **67**(11): 4427～4440

[9] Berryman J G. Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media. *Geophysics*, 1979, **44**(5): 896～917

[10] Schoenberg M. Transversely isotropic media equivalent to thin isotropic layers. *Geophysical Prospecting*, 1994, **42**(8): 885～915

[11] Berryman J G, Grechka V Y, Berge P A. Analysis of Thomsen parameters for finely layered VTI media. *Geophysical Prospecting*, 1999, **47**(6): 959～978

[12] Tsvankin I. Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media. New York: Pergamon Press,

2001

[13] Xiao C Y. A comparison of different methods for estimating Thomsen′s anisotropy parameters [Master′s Thesis]. Calgary: Department of Geology and Geophysics, University of Calgary, 2006

[14] 李 磊. 横向各向同性介质 Thomsen 近似公式的适用范围. 石油物探, 2008, **47**(2): 116～122
Li L. Applicability of Thomsen approximate formula in transversely isotropic media. *Geophysical Prospecting for Petroleum* (in Chinese), 2008, **47**(2): 116～122

[15] 马德堂, 朱光明. 关于横向各向同性介质中的 Thomsen 参数取值的讨论. 石油地球物理勘探, 2006, **41**(4): 431～438
Ma D T, Zhu G M. Discussion on taking values of Thomsen parameters in transverse isotropic media. *Oil Geophysical Prospecting* (in Chinese), 2006, **41**(4): 431～438

[16] 李 磊. TI 介质中的相速度和群速度及射线参数. 石油物探, 2008, **47**(4): 334～337
Li L. Phase velocity, group velocity, and ray parameters in transversely isotropic media. *Geophysical Prospecting for Petroleum* (in Chinese), 2008, **47**(4): 334～337

[17] Schoenberg M A, de Hoop M V. Approximate dispersion relations for qP-qSV-waves in transversely isotropic media. *Geophysics*, 2000, **65**(3): 919～933

[18] Vavrycuk V. Generation of triplications in transversely isotropic media. *Physical Review B*, 2003, **68**(5): 54107

[19] Thomsen L, Dellinger J. On shear-wave triplication in transversely isotropic media. *Journal of Applied Geophysics*, 2003, **54**(3-4): 289～296

[20] Berge P A. Constraints on elastic parameters and implications for lithology in VTI media. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 1995, **14**(1): 906～909

[21] Aki K, Richards P G. Quantitative Seismology, Theory and Methods. Freeman, 1980

[22] Lakes R. Foam structures with a negative Poisson′s ratio. *Science*, 1987, **235**(4792): 1038～1040

[23] Baughman R H, Shacklette J M, Zakhidov A A, et al. Negative Poisson′s ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*, 1998, **392**(6674): 362～365

[24] Hearmon R F S. The elastic constants of anisotropic materials - II. *Advances in Physics*, 1956, **5**(19): 323～382

[25] Simmons G, Wang H. Single Crystal Elastic Constants and Calculated Aggregate Properties: A Handbook, 2nd ed. Cambridge: M. I. T. Press, 1971

[26] Madelung O, Martienssen W. Landolt-Brnstein: Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology-New Series, Annual volumes 11996. Springer-Verlag, 1996

[27] Gold L. Evaluation of the stiffness coefficients for beryllium from ultrasonic measurements in polycrystalline and single crystal specimens. *Physical Review*, 1950, **77**(3): 390～395

[28] Smith J F, Arbogast C L. Elastic constants of single crystal Beryllium. *Journal of Applied Physics*, 1960, **31**(1): 99～102

[29] Rowlands W D, White J S. The determination of the elastic constants of beryllium in the temperature range 25 to 300℃. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 1972, **2**(2): 231～236

[30] Migliori A, Ledbetter H, Thoma D J, et al. Beryllium′s monocrystal and polycrystal elastic constants. *Journal of Applied Physics*, 2004, **95**(5): 2436～2440

[31] Fowler P. Practical approximations: A systematic anatomy. Presented at the 10th Intenational Workshop on Seismic Anisotropy, 2002

[32] Byun B S. Seismic parameters for media with elliptical velocity dependencies. *Geophysics*, 1982, **47**(12): 1621～1626

[33] Helbig K. Elliptical anisotropy-Its significance and meaning. *Geophysics*, 1983, **48**(7): 825～832

[34] Helbig K. Longitudinal directions in media of arbitrary anisotropy. *Geophysics*, 1993, **58**(5): 680～691

[35] Payton R G. Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media. Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1983

[36] Roganov Y, Stovas A. On shear-wave triplications in a multilayered transeversely isotropic medium with vertical symmetry axis. *Geophysical Prospecting*, 2010, **58**(4): 549～559

[37] Slater C, Crampin S, Brodov L Y, et al. Observations of anisotropic cusps in transversely isotropic clay. *Journal of the Canadian Society of Exploration Geophysicists*, 1993, **29**(1): 216～226

[38] Tsvankin I. Anisotropic parameters and P-wave velocity for orthorhombic media. *Geophysics*, 1997, **62**(4): 1292～1309

[39] Grechka V, Tsvankin I. 3-D moveout velocity analysis and parameter estimation for orthorhombic media. *Geophysics*, 1999, **64**(3): 820～837

[40] Bakulin A, Grechka V, Tsvankin I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data-Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry. *Geophysics*, 2000, **65**(6): 1803～1817

[41] Grechka V, Pech A, Tsvankin I. Parameter estimation in orthorhombic media using multicomponent wide-azimuth reflection data. *Geophysics*, 2005, **70**(2): D1～D8

[42] 卢明辉, 唐建侯, 杨慧珠等. 正交各向异性介质 P 波走时分析及 Thomsen 参数反演. 地球物理学报, 2005, **48**(5): 1167～1171
Lu M H, Tang J H, Yang H Z, et al. P-wave traveltime analysis and Thomsen parameters inversion in orthorhombic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(5): 1167～1171

[43] 魏建新, 狄帮让, 王椿镛. 岩石正交各向异性的实验观测. 地球物理学进展, 2008, **23**(2): 343～350
Wei J X, Di B R, Wang C Y. The experimental observation of the rock orthorhombic anisotropy. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 2008, **23**(2): 343～350

[44] Mensch T, Rasolofosaon P. Elastic-wave velocities in anisotropic media of arbitrary symmetry-generalization of Thomsen′s parameters ε, δ and γ. *Geophysical Journal International*, 1997, **128**(1): 43～64

[45] Peník I, Gajewski D. Polarization, phase velocity, and NMO velocity of qP-waves in arbitrary weakly anisotropic media. *Geophysics*, 1998, **63**(5): 1754～1766

(本文编辑 胡素芳)